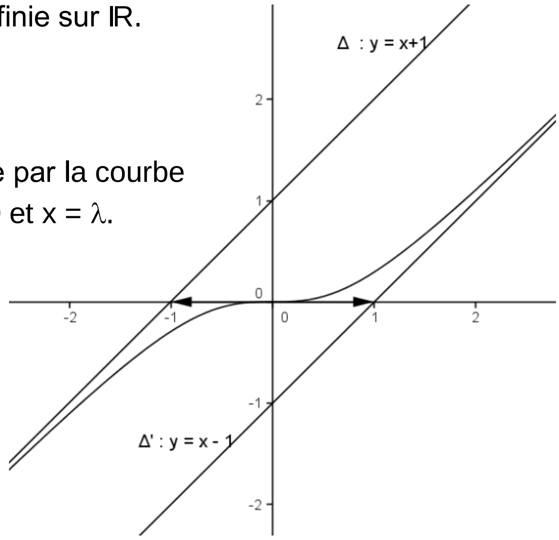
Exercice 1 : (5 points)



Ci-contre la représentation graphique d'une fonction f définie sur IR.

1) Donner le tableau de variation de f.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$.

3) Soit un réel $\lambda > 1$ et $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = \lambda$.

a) Montrer que $\frac{(\lambda-1)^2}{2} \leq A(\lambda) \leq \frac{\lambda^2}{2} + \lambda$.

b) Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda^2}$.

4) On suppose que $f(x) = ax + \frac{bx}{\sqrt{x^2+1}}$.

a) Montrer que a = 1 et b = -1.

b) Calculer $A(\lambda)$ en fonction de λ.

c) Retrouver alors $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda^2}$.

Exercice 2 : (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un carré direct AKJI de centre O et on désigne par C et B les symétriques du point A respectivement par rapport à I et K.

1) Faire une figure

2) On pose $f = h_{(A,2)} \; o \; t_{\overrightarrow{IA}}$.

Déterminer f (C) puis Caractériser f.

3) Soit g la similitude indirecte qui transforme A en I et B en J.

a) Déterminer les images par g des droites (KJ) et (BJ) .

b) Déduire que g(J) = O

4) a) Montrer que g admet un centre qu'on notera Ω

b) Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés (O, 4) et (B, -1) puis construire Ω .

5) On désigne par Δ la médiatrice du [AI], On pose $\psi = h_{(A,-2)} \; o \; S_\Delta$

a) Montrer que $\psi = f \text{ o } S_{(AI)}$

b) Donner alors la nature et les éléments caractéristiques de ψ.

Exercice 3 : (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$; unité graphique 8 cm

On considère la transformation f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{\sqrt{2}}{4}(-1+i)z$

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

2) On définit la suite de points (M_n) de la façon suivante :

M_0 est le point d'affixe $z_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$.

On note z_n l'affixe du point M_n.

a) Justifier que, pour tout entier naturel n, $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\frac{3n\pi}{4}}$

b) Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

3) Soient n et p deux entiers naturels.

À quelle condition sur n et p les points O, M_n et M_p sont alignés ?

<u>Exercice 4 : (6 points)</u>

Soit f la fonction définie sur IR₊ par $f(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^4} dt$

1) a) Montrer que, pour tout réel x ≥ $\sqrt{2}$; $\int_{\sqrt{2}}^x \frac{t}{1+t^4} dt \leq 1 + \frac{1}{1-x^2}$

b) Déduire que f est bornée sur $[\sqrt{2}, +\infty[$.

c) Montrer alors que f admet une limite finie L en +∞.

2) Soit g la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par : $g(x) = \int_0^{\sqrt{tanx}} \frac{t}{1+t^4} dt$

a) Montrer que la fonction u définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par : u(x) = $\sqrt{tanx}$ réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur IR₊.

b) Justifier que g est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et déterminer $g'(x)$.

c) Montrer alors que $g(x) = \frac{1}{2}x$, pour tout x de $[0, \frac{\pi}{2}[$.

d) Soit h la fonction définie sur IR par h(x) = $\frac{x}{1+x^4}$.

Déterminer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (H) de la fonction h, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 1.

3) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Construire la courbe (C) de f dans un repère orthonormé.

MR : LATRACH

Correction Contrôle II RATTRAPAGE

4M1-5

2010/2011

Exercice 1

1) a) Rapport et angle de S.

Rapport $k = \frac{OI}{DC} = \frac{1}{2}$

Angle $\alpha \equiv (\widehat{\vec{DC}, \vec{OI}}) \equiv -\frac{\pi}{2} \ (2\pi)$

b) Construction de Ω.

- $S(D) = O \Rightarrow (\widehat{\vec{\Omega D}, \vec{\Omega O}}) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi)$

$\Rightarrow \Omega \in \widehat{DO}$ du $\mathcal{C}_{[DO]}$

- $S(C) = I \Rightarrow (\widehat{\vec{\Omega C}, \vec{\Omega I}}) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi)$

$\Rightarrow \Omega \in \widehat{CI}$ du $\mathcal{C}_{[CI]}$

ccl : $\Omega \in \widehat{DO} \cap \widehat{CI}$

2) a) Images de (BD) et (BC) par S

- S((BD)) est la perpendiculaire à (BD) passant par O

$\Rightarrow S((BD)) = (AC)$

- S((BC)) est la perpendiculaire à C (BC)) passant par I

$\Rightarrow S((BC)) = (AB)$

b) S(B)?, S(A)? et SoS(B).

- $\left.\begin{array}{l} B \in (BD) \cap (BC) \\ S \text{ conserve le contact} \end{array}\right\} \Rightarrow S(B) \in (AC) \cap (AB)$

d'où $S(B) = A$

- $\left\{\begin{array}{l} ABCD \text{ est un carré} \\ \text{L'image d'A carré pas est un carré} \end{array}\right.$

Alors A'AIO est un carré où $A' = S(A)$

Comme JAIO est un carré

Alors $S(A) = J$.

- $S \circ S(B) = S(A) = J$

ccl : $S(B) = A$; $S(A) = J$, $S \circ S(B) = J$

c) $\Omega = $ barycentre $(B,1);(J,4)$

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ S \circ S(B) = J \\ \cdot\ S \circ S = h(\Omega, -\frac{1}{4}) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\Omega J} = -\frac{1}{4}\vec{\Omega B}$

$\Rightarrow \Omega = \text{bary}(J,4),(B,1)$

ccl : $\Omega = \text{bary}\ (J,4);(B,1)$

3) f : Application complexe associée à S.

$f : z' = az + b$

où $a = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} = -\frac{i}{2}$

Comme $S(A) = J \Rightarrow b = \frac{i}{2}$

ccl : $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$

$M(z) \longmapsto M'(z')$

tq $z' = -\frac{i}{2} z + \frac{i}{2}$

b) Affixe z_0 de Ω.

$z_0 = \dfrac{i/2}{1 + i/2}$

$= \frac{1}{5} + \frac{2}{5} i$

Exercice 2 :

1) $N \equiv 0\ [7] \Leftrightarrow a + b \equiv 0\ [7]$

$\left\{\begin{array}{l} \cdot\ N = a\,10^3 + b\,10^2 + a \cdot 10 + 7 \\ \cdot\ 10 \equiv 3\ [7] ;\ 10^2 \equiv 2\ [7],\ 10^3 \equiv -1\ [7] \end{array}\right.$

$\Rightarrow N \equiv 0\ [7] \Leftrightarrow -a + 2b + 3a \equiv 0\ [7]$

$\Leftrightarrow 2(a + b) \equiv 0\ [7]$

$\Leftrightarrow 4 \cdot 2 \cdot (a + b) \equiv 0\ [7]$

$\Leftrightarrow a + b \equiv 0\ [7]$

ccl : $N \equiv 0\ [7] \Leftrightarrow a + b \equiv 0\ [7]$

Rep : VRAI

2) $\lim\limits_{+\infty} e^{x} \ln(1 + e^{-x})$

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln(1 + e^{-x})}{e^{-x}}$

$= \lim\limits_{+\infty} \varphi(e^{-x})$; $\varphi(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{t}$

$= 1$ car $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{+\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{t \to 0} \varphi(t) = 1 \end{array}\right.$

Rep : FAUX

3) Approximation affine

on pose $f(x) = \ln \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3} \ln(x)$

$\Rightarrow f(e+h) \simeq f(e) + h\, f'(e)$

$\simeq \frac{1}{3} + \frac{h}{3e}$

Rép FAUX

4) $p \,/\, n^2 - 1$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tq $n^2 - 1 = kp$

$\Rightarrow n^2 - kp = 1$

$\xRightarrow{\text{BÉzout}} n \wedge p = 1$

Rép : VRAI

ccl:

Qu	1	2	3	4
Rép	VRAI	FAUX	FAUX	VRAI

Exercice 3 :

1) a/ Les diviseurs positifs de 72

$72 = 2^3 \cdot 3^2$

$\Rightarrow D_{72} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$

b) Recherche de $(x;y)$

- $m = x \vee y$; $d = x \wedge y$
- $m.d = d^2 x'y'$; $x = dx'$, $y = dy'$, $x' \wedge y' = 1$

$m - 4d = 72$

$\Leftrightarrow d(x' \cdot y' - 4) = 72$

$\Rightarrow d / 72$ et $30 < d < 40$

$\Rightarrow d = 36$

D'où $x'y' - 4 = 2$

$\Rightarrow x'y' = 6$

$\Rightarrow x' = 1$ et $y' = 6$ ou $x' = 2$ et $y' = 3$

$\Rightarrow x = 36$ et $y = 216$

ou $x = 72$ et $y = 108$

ccl $S_{\mathbb{N}^2} = \{(36, 216); (72, 108)\}$

MR : LATRACH

2) a) $a \wedge 10 = 1 \Rightarrow a \equiv \dots [10]$

Soit $a = 10q + r$ où $0 \leq r \leq 9$

$\Rightarrow a \wedge 10 = 1 \Leftrightarrow 10 \wedge r = 1$

$\Rightarrow r \in \{1, 3, 7, 9\}$

D'où $a \equiv 1 [10]$ ou $a \equiv 3 [10]$

$a \equiv 7 [10]$ ou $a \equiv 9 [10]$

b) $a \wedge 10 = 1 \Rightarrow a^4 \equiv 1 [10]$

- $a \equiv 1 [10] \Rightarrow a^4 \equiv 1 [10]$
- $a \equiv 3 [10] \Rightarrow a^4 \equiv (-1)^2 [10]$
- $a \equiv 7 [10] \Rightarrow a^4 \equiv (-1)^2 [10]$
- $a \equiv 9 [10] \Rightarrow a^4 \equiv (-1)^4 [10]$

D'où si $a \wedge 10 = 1 \Rightarrow a^4 \equiv 1 [10]$

3) a) $(a+b) \wedge ab = 1$

on pose $d = (a+b) \wedge ab$

- $\left.\begin{array}{l} d / a+b \\ d / ab \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} d / a^2 \\ d / b^2 \end{array}$

* Supposons que $d > 1$

Alors d admet un diviseur premier p

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} p / a^2 \\ p / b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} p / a \\ p / b \end{array}$

or $a \wedge b = 1 \Rightarrow p = 1$ absurde.

Alors $d = 1$

ccl : $(a+b) \wedge ab = 1$

*2ème méthode

on a : $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z}$ tq $au + bv = 1$

$\Rightarrow a^2 u + ab v = a$

et $ab u + b^2 v = b$

Comme d / ab Alors d / a et d / b

d'où $d = 1$.

b) $(a+b)$ et a^2-ab+b^2 sont premiers ou divisible par 3.

On pose $d=(a+b)\wedge(a^2-ab+b^2)$

- $\left.\begin{array}{l} d/a+b \\ d/a^2-ab+b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow d/3ab$

- $(a+b)\wedge ab=1 \Leftrightarrow \exists u,v \in \mathbb{Z}$

tq $(a+b)u+abv=1$

$\Rightarrow 3(a+b)u+3abv=3$

Comme $\left.\begin{array}{l} d/3ab \\ d/a+b \end{array}\right\} \Rightarrow d/3$

d'où $d=1$ ou $d=3$

ccl: $(a+b)$ et a^2-ab+b^2 sont premiers ou divisible par 3.

Exercice 4:

A 1) Existence de φ_m sur $[0,1]$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f_m(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^m \ln(x)$
$= 0$
$= f_m(0)$

$\Rightarrow f_m$ C en 0^+.

- f_m C sur $]0,1]$ (Produit de f^{ct} C)

$\Rightarrow f_m$ Continue sur $[0,1]$

D'où $\varphi_m(x)$ existe sur $[0,1]$

2) a) Calcul de $\varphi_m(x)$, $0<x\leq 1$

$\varphi_m(x)=\int_x^1 t^m \ln(t)\,dt$

on pose $u'(t)=t^m \Rightarrow u(t)=\frac{1}{m+1}t^{m+1}$
$v(t)=\ln(t) \Rightarrow v'(t)=\frac{1}{t}$

$\Rightarrow \varphi_m(x) = -\frac{x^{m+1}\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}(1-x^{m+1})$

ccl: $\varphi_m(x) = \frac{-1}{(m+1)^2} + \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} - \frac{x^{m+1}\ln x}{m+1}$

b) Valeur de $\varphi_m(0)$

- $\varphi_m(x) = \int_1^x -f_m(t)\,dt$

$\Rightarrow \varphi_m$ est la primitive de $-f_m$ sur $[0,1]$ qui s'annule en 1

Alors φ_m est continue en 0

Alors $\varphi_m(0)=\lim\limits_{x\to 0}\varphi_m(x)$

ccl: $\varphi_m(0) = -\frac{1}{(m+1)^2}$

B 1) a) Existence de U_n

$\left\{\begin{array}{l} \cdot \lim\limits_{x\to 0^+} g_n(x) = 0 = g_n(0) \\ \cdot \lim\limits_{x\to 1^-} g_n(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{2n+1}}{x+1}\cdot\frac{\ln x}{x-1} = \frac{1}{2} = g_n(1) \\ \cdot g_n \text{ continue sur }]0,1[\text{ (quotient de } f^{ct} \text{ C)} \end{array}\right.$

$\Rightarrow g_n$ est Continue sur $[0,1]$

$\Rightarrow u_n$ existe.

b) $U_{n+1}-U_n = \varphi_{2n+1}(0)$?

$U_{n+1}-U_n = \int_0^1 g_{n+1}(x)-g_n(x)\,dx$

on pose $\psi(x)=g_{n+1}(x)-g_n(x)$

$\left\{\begin{array}{l} \cdot x=0 \;;\; \psi(0)=0 \\ \cdot x=1 \;;\; \psi(1)=0 \\ \cdot 0<x<1 \;;\; \psi(x)=\frac{x^{2n+1}}{x^2-1}\ln(x)\,(x^2-1) \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \psi(x) = x^{2n+1}\ln(x) \;;\; 0<x\leq 1 \\ \psi(0)=0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \psi = f_{2n+1}(x)$

D'où $U_{n+1}-U_n = \int_0^1 f_{2n+1}(x)\,dx$
$= \varphi_{2n+1}(0)$

ccl: $U_{n+1}-U_n = \varphi_{2n+1}(0)$.

c) Monotonie de U_n

$U_{n+1}-U_n = \varphi_{2n+1}(0)$
$= -\frac{1}{(2n+1)^2} < 0$

ccl: (U_n) est décroissante.

Mr: LATRACH

2) Calcul de l'aire.

$\mathcal{A} = \int_1^2 (h(x) + x)\,dx$

$= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + 2\ln x\right) dx$

$= \left[\ln(x) + 2x\ln x - 2x\right]_1^2$

$= 5\ln(2) - 2$

ccl: $\mathcal{A} = (5\ln(2) - 2)$ u.a

3) a) $x \in]0,1[\,;\ 0 < \frac{x\ln x}{x^2-1} < \frac{1}{2}$

• D'après le graphique on a:

$h(x) > 0$

$\Rightarrow \frac{1-x^2}{x} + 2\ln x > 0$

$\Rightarrow 1 - x^2 + 2x\ln x > 0$

$\Rightarrow 1 + \frac{2x\ln x}{1-x^2} > 0$

$\Rightarrow 2\frac{x\ln x}{1-x^2} > -1$

$\Rightarrow 0 < \frac{x\ln x}{x^2-1} < \frac{1}{2}$ car $\ln x < 0$

ccl: $\forall x \in]0,1[\,;\ 0 < \frac{x\ln x}{x^2-1} < \frac{1}{2}$.

b) $\forall x \in [0,1]:\ 0 \leq g_n(x) \leq \frac{1}{2}x^{2n}$

• $x \in]0,1[\,;\ 0 < \frac{x\ln x}{x^2-1} < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 0 < \frac{x^{2n+1}\ln x}{x^2-1} < \frac{x^{2n}}{2}$.

• $x = 0\,;\ g_n(0) = 0$

• $x = 1\,;\ g_n(1) = \frac{1}{2}$

D'où $\forall x \in [0,1];\ 0 \leq g_n(x) \leq \frac{x^{2n}}{2}$

ccl. $\forall x \in [0,1];\ 0 \leq g_n(x) \leq \frac{x^{2n}}{2}$.

c) Encadrement et limite de u.

• $0 \leq g_n(x) \leq \frac{x^{2n}}{2}$

• $\left.\begin{array}{l} x \longmapsto g_n(x) \\ x \longmapsto \frac{x^{2n}}{2} \end{array}\right\}$ sont continues sur $[0,1]$

Alors

$0 \leq \int_0^1 g_n(x)\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{2}x^{2n}\,dx$

$\Rightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2(2n+1)}\left[x^{2n+1}\right]_0^1$

$\Rightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2(2n+1)}$

ccl: $\forall n \in \mathbb{N};\ 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2(2n+1)}$

* Calcul de $\lim u_n$

• $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2(2n+1)}$

$\Rightarrow |u_n| \leq \frac{1}{2(2n+1)}$

et $\lim \frac{1}{2(2n+1)} = 0$

Alors $\lim u_n = 0$

ccl: $\lim u_n = 0$

Lycée Bilote Ariana
2010 – 2011.